① Încălzire:

Să se calculeze următoarea integrală nedefinită:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{1+x}}\,dx$$

② Fie $F:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

Determinați asimptotele funcției F.

③ Calculați următoarele limite:

a) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{j(j+1)}}{n^2}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n^2}\ln\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{j\pi}{4n^2}\right)\right)$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{1}{n^2+\frac{n^6}{2C_{j+1}^{2}}}$$

④ Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă, $f(0)=\frac{1}{2}$

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitivă a lui F a.î.

$$F(x)+f(x) = \sin x$$

Determinați $f(\pi)$.

⑤ Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, continuă, f nu este identic nulă.

şi $f(0)=0$.

Dacă f^3 este o primitivă a lui f,

determinați funcția f.

⑥ Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ştiind că $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f cu $F(0)=-1$ şi

$$f(x)-F(x)\sqrt{x} = \left(\sqrt{x}+8x\right)\cdot e^{-4x^2},\ (\forall)\, x\in\mathbb{R}$$

⑦ Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0, (\forall)\, x\in\mathbb{R}$ astfel încât f admite primitive. Fie F o primitivă a funcției f. Arătați că, pentru orice $j\in\mathbb{R}$, funcția $h_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h_j(x)=F(x)+f(j)\cdot[x]$ este strict monotonă.

($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x).

⑧ a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$

b) Arătați că pentru orice funcție integrabilă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx=0$$

c) Arătați că, pentru orice funcție derivabilă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, cu derivata continuă, avem:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,dx=f(1)$$

d) Arătați că, pentru orice funcție integrabilă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, continuă în punctul 1, are loc:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,dx=f(1)$$

(9) Să se calculeze următoarea limită:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{2 + \cos y} \, dy$$

Soluții

(1) Schimbarea de variabilă:

$$t = \sqrt{1+x} \qquad x = t^2 - 1$$
$$dx = 2t\,dt$$

$$I = \int \frac{1}{x + \sqrt{1+x}}\,dx =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2 - 1 + t}\,dt$$

$$= \int \frac{2t+1}{t^2+t-1} - \int \frac{dt}{t^2+t-1}$$

$$= \ln(t^2+t-1) - \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$$

$$\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\left(t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)-\left(t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\int \frac{dt}{t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}} - \int \frac{1}{t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)$$

In final:

$$I = \ln\left(t^2+t-1\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)$$

$$= \ln\left(x+\sqrt{1+x}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+x}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{1+x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)$$

② O astfel de funcție e de forma:

$$F(x) = \begin{cases} \int_1^x e^{\frac{1}{t}} dt + c_1, & x > 0 \\ \int_{-1}^x e^{\frac{1}{t}} dt + c_2, & x < 0 \end{cases}$$

F e continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, deci am putea avea asimptote doar la $0, \infty, -\infty$.

La 0:

Dacă $t < 0$, atunci $0 < e^{\frac{1}{t}} < 1$,

deci $$\left| \int_{-1}^x e^{\frac{1}{t}} dt \right| \leq |x+1| < 1,$$

$(\forall)\ x \in (-1, 0)$

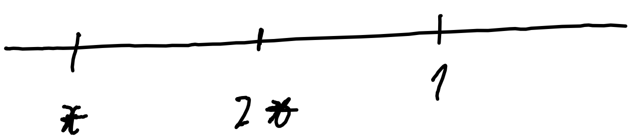
Prin urmare, dreapta $x = 0$ nu este asimptotă verticală la stânga.

Calculăm $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x) =$

$$= c_1 + \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_1^x e^{\frac{1}{t}}\, dt = c_1 - \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_x^1 e^{\frac{1}{t}}\, dt$$

Pt $0 < x < \frac{1}{2}$

$$\int_x^1 e^{\frac{1}{t}}\, dt \geq \int_x^{2x} e^{\frac{1}{t}}\, dt \geq x \cdot e^{\frac{1}{2x}} \xrightarrow{x \to \infty} \infty$$



Prin urmare, $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x > 0}} F(x) = -\infty$, de unde

reiese că dreapta $x = 0$ este asimptotă la dreapta pt. G_F

Pentru asimptote orizontale/oblice la $\pm\infty$,

calculăm, folosind Teorema lui L'Hospital cazul numitorului convergând la 0:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

Prin urmare, ecuația posibilelor asimptote la $\pm\infty$

ar fi de forma $x+n$

$$\lim_{x\to\infty} \left(F(x)-x\right) = c_1+1+\lim_{x\to\infty} \int_1^x \left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)dt \qquad (2)$$

Acum din Teorema lui Lagrange $e^y-1 = y\cdot e^z$, cu $z\in(0,y)$,

$(\forall)\ y>0$,

deci $e^y-1>y$.

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to\infty}\int_1^x \left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)dt > \lim\limits_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt =$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

Din (2) rezultă că F nu are asimptote la $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(F(x)-x) = c_2 - \lim_{x\to-\infty}\left(\int_x^{-1} e^{\frac{1}{t}}dt + x+1-1\right)$$

$$= c_2+1-\lim_{x\to-\infty}\int_x^{-1}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)dt$$

$$= c_2+1+\lim_{x\to\infty}\int_x^{-1}\left(1-e^{\frac{1}{t}}\right)dt$$

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^{-1}\left(1-e^{\frac{1}{t}}\right)dt$$

$$= \lim_{x\to\infty}\int_1^x\left(1-e^{-\frac{1}{t}}\right)dt$$

$$= \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{e^{\frac{1}{t}}-1}{e^{\frac{1}{t}}}\,dt$$

$$t>1 \Rightarrow \frac{1}{t}<1 \Rightarrow e^{\frac{1}{t}}<e \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{1}{t}}}>e$$

Rezultă că

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^1 \left(1 - e^{\frac{1}{t}}\right) dt \geq \frac{1}{e} \lim_{x \to \infty} \int_1^x \left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right) dt = \infty$$

În concluzie, funcția F nu are asimptotă la $-\infty$.

③ Ne amintim proprietatea:

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilă, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_{n,j}),$$

oricum am alege $x_{n,j} \in \left[a + (b-a)\cdot\frac{j-1}{n},\ a + (b-a)\cdot\frac{j}{n}\right]$

a) $$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{j(j+1)}}{n}$$

$$\frac{j}{n} \leq \frac{\sqrt{j(j+1)}}{n} \leq \frac{j+1}{n}$$

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\sqrt{(j-1)j}}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{(j-1)\cdot j}}{n} + \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n}}_{\downarrow \atop 0}$$

$f(x) = x$

$$x_{n,j} = \frac{\sqrt{(j-1)\cdot j}}{n} \in \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right)$$

Conform proprietății enunțate

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

b) Limita se poate scrie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+tg\left(\frac{\pi\cdot i}{4n}\right)\right)$$

$$f(x) = \ln(1+tg\, x)$$

$$[a,b] = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+tg\left(\frac{\pi\cdot i}{4n}\right)\right) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tg\, x)\, dx$$

Calculăm $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tg\, x)\, dx$

Schimbare de variabilă $y = \frac{\pi}{4} - x$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right) dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}\right)-tg\, x}{1+tg\left(\frac{\pi}{4}\right)tg\, x}\right) dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \operatorname{tg} x}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln 2 - \ln(1 + \operatorname{tg} x)\right] dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \ln 2 - I$$

Prin urmare, $I = \frac{\pi}{8} \cdot \ln 2$

c) $$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{n^2 + \frac{n^6}{2 C_{i+1}^2}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n + \frac{n^3}{2 C_{i+1}^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{n^2}{i(i+1)}}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{n^2 + \frac{n^6}{2 C_{i+1}^2}} = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx$$

$$= 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= 1 - \operatorname{arctg}(x) \Big|_0^1$$

$$= 1 - \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(4)

$$F(x) + F'(x) = \sin(x) \quad \Big| \cdot e^{x}$$

$$F(x)\cdot e^{x} + F'(x)\cdot e^{x} = e^{x}\sin x$$

$$\left(F(x)\cdot e^{x}\right)' = e^{x}\sin x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x)\cdot e^{x} = C + \int_0^x e^{t}\sin(t)\,dt$$

Calculăm $I(x) = \int_0^x e^{t}\sin(t)\,dt$

Integrăm prin părți:

$$I(x) = \int_0^x (e^{t})'\sin t\,dt$$

$$= e^{t}\sin t\,\Big|_0^x - \int_0^x e^{t}\cos t\,dt$$

$$= e^{x}\sin x - \int_0^x e^{t}\cos t\,dt$$

$$I(x) = e^{x}\sin x - \int_0^x (e^t)' \cos t \, dt$$

$$= e^{x}\sin x - e^t \cos t \Big|_0^x - \int_0^x e^t \sin t \, dt$$

$$= e^{x}\sin x - e^{x}\cos x + 1 - I(x)$$

Prin urmare,

$$I(x) = \frac{e^{x}\sin x - e^{x}\cos x + 1}{2}$$

$$F(x) \cdot e^{x} = c + \frac{e^{x}\sin x - e^{x}\cos x + 1}{2}$$

$$F(x) = c \cdot e^{-x} + \frac{\sin x - \cos x + e^{-x}}{2}$$

$$f(x) = F'(x) = -c \cdot e^{-x} + \frac{\cos x + \sin x - e^{-x}}{2}$$

$$f(0) = \frac{1}{2}, \text{ deci } -c \cdot e^{0} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-0}}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{de unde } c = -\frac{1}{2}$$

Rezultă că

$$f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{2}, \text{ deci } f(\pi) = -\frac{1}{2}.$$

(5)

$$(f^3)' = f \qquad (*)$$

Întrebare: Este f derivabilă?

Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Fie x_0 un punct a.î. $f(x_0) \neq 0$.

f e continuă $\Rightarrow$ $(\exists)$ I interval în jurul punctului x_0 a.î. $f(x) \neq 0$, $(\forall)$ $x \in I$

Pentru $x \in I$, $f(x) = \sqrt[3]{f^3(x)}$, deci

f e derivabilă pe I

Pentru $x \in I$, avem din $(*)$

$$3(f(x))^2 \cdot f'(x) = f(x), \text{ de unde}$$

$$3\, f(x) \cdot f'(x) = 1.$$

Prin urmare, $\frac{3}{2}\left((f(x))^2\right)' = 1$

Prin urmare, $(f(x))^2 = c_I + \frac{2}{3}x$, $(\forall)$ $x \in I$

$$f(x) = \sqrt{c_I + \frac{2}{3}x}, \ (\forall)\ x \in I$$

Fie I = intervalul de lungime maximă

în jurul lui x_0 a.î. $f(x) \neq 0$ pe I

$$f(x) = \sqrt{c_I + \frac{2}{3}x} \quad , (\forall)\, x \in I$$

Presupunem că I este mărginit superior,

adică $f(x) = \sqrt{c_I + \frac{2}{3}x}$, $(\forall)\, x \in (x_0, b)$ și

$f(b) = 0$

contradicție cu f continuă și

$c_I + \frac{2}{3}x \geq 0$ pe I.

Prin urmare, dacă $f(x_0) \neq 0$, atunci

$f \neq 0$ pe (x_0, ∞).

Rezultă că f este de forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \sqrt{c_I + \frac{2}{3}x}, & x > a \end{cases} \quad , a \geq 0$$

f e continuă, deci $c_I = -\frac{2}{3}a$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,a]\\ \sqrt{\frac{2}{3}(x-a)}, & x\geq a\end{cases}$$

$$f^3(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,a]\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(x-a)^{\frac{3}{2}}, & x\geq a\end{cases}$$

Verificare $$\left(f^3(x)\right)'=\begin{cases}0, & x\in[0,a)\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{2}\cdot(x-a)^{\frac{1}{2}}, & x>a\end{cases}$$

$$\left(f^3(x)\right)'=\begin{cases}0, & x\in[0,a)\\ \sqrt{\frac{2}{3}(x-a)}, & x>a\end{cases}$$

$$\lim_{x\to a}\left(f^3(x)\right)'=0$$

f continuă

$\Rightarrow (f^3)'(0)=0$

consecință a Teoremei lui Lagrange

În concluzie, $(f^3)'=f$

⑥ $$f(x) - F(x)\cdot\sqrt{x} = \left(\sqrt{x} + 8x\right)\cdot e^{-4x^2}$$
$(*)$

Aş vrea să am în membrul stâng ceva de genul:

$$\left(\frac{F}{g}\right)' = \frac{f\cdot g - F\cdot g'}{g^2}$$

Condiţia: $\frac{g'}{g} = \sqrt{x}$, de unde

$$(\ln g)' = \sqrt{x} \Rightarrow \ln g = c + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$g = e^{c}\cdot e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$$, în particular $g = e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$

Înmulţim $(*)$ cu $e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$ şi avem:

$$f(x)\cdot e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} - F(x)\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}}\cdot x^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (\sqrt{x}+8x)\cdot e^{-4x^2+\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}}$$

Pentru a avea exact formula $\left(\frac{F}{g}\right)'$, împărțim la $g^2 = e^{\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{f(x)\cdot e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} - F(x)\cdot\left(e^{\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}}\right)'}{\left(e^{\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}}\right)^2} = (\sqrt{x}+8x)\cdot e^{-4x^2-\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\frac{F(x)}{e^{\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}}}\right)' = -\left(e^{-4x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}\right)'$$

Prin urmare,

$$\frac{F(x)}{e^{\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}}} = C - e^{-4x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$$

$$F(x) = C\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}} - e^{-4x^2}$$

$$F(0) = -1 \Rightarrow C = 0 \,, \text{ deci}$$

$$F(x) = e^{-4x^2}$$

⑦ Ne amintim următoarele proprietăți:

I O funcție care admite primitive are proprietatea lui Darboux (i.e. imaginea oricărui interval este un interval)

II O funcție cu proprietatea lui Darboux care nu se anulează nicăieri are semn constant

$$\left.\begin{array}{l}\text{Din I și II} \\ f(x) \neq 0 \ (\forall) x\end{array}\right| \Rightarrow f \text{ are semn constant}$$

Fie $y > x$

$$h_j(y) - h_j(x) = F(y) - F(x) + f(j)\cdot([y]-[x])$$

Din Teorema lui Lagrange, $(\exists)\, \xi_{y,x} \in (x,y)$ a.î.

$$h_j(y) - h_j(x) = f(\xi_{y,x})\cdot(y-x) + f(j)\cdot([y]-[x])$$

$$= \varepsilon\cdot\left[|f(\xi_{y,x})|\cdot(y-x) + |f(j)|\cdot([y]-[x])\right]$$

unde $\varepsilon = \pm 1$ este semnul funcției f

În concluzie, h_j este strict monotonă.

(8) a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \int_0^1 (x^{n+1})' \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$$

integrăm prin părți

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left[\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\int_0^1 x^{n+1} \cdot \cos\frac{\pi x}{2}\, dx\right]$$

$$\left|\int_0^1 x^{n+1} \cdot \cos\frac{\pi x}{2}\, dx\right| \leq \left|\int_0^1 x^{n+1}\, dx\right| =$$

$$= \left|\left.\frac{x^{n+2}}{n+2}\right|_0^1\right|$$

$$= \frac{1}{n+2}$$

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x^{n+1} \cdot \cos\frac{\pi x}{2}\, dx = 0$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx =$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

b) Ne amintim:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilă $\Rightarrow$ f este mărginită,

adică $(\exists)\, M > 0$ a.î.

$|f(x)| < M, \ (\forall)\, x \in [a,b]$

$$\left| \int_0^1 x^n f(x)\, dx \right| < M \cdot \left| \int_0^1 x^n \right| = \frac{M}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

c) Se procedează identic ca la punctul a), integrând prin părți

d) Notăm $I_n = (n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx$

Având în vedere că $\int_0^1 x^n = \frac{1}{n+1}$, obținem:

$$I_n - f(1) = (n+1)\int_0^1 x^n \big(f(x) - f(1)\big)\,dx$$

Știm că f e mărginită, deci există $M > 0$ a.î. $|f(x)| < M$, $(\forall)\, x$

Fie $\varepsilon > 0$. Există $\delta_\varepsilon \in (0,1)$ a.î.

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon, \text{ dacă } |x - 1| \le \delta_\varepsilon$$

$$I_n - f(1) = (n+1)\int_0^{1-\delta_\varepsilon} x^n \big(f(x) - f(1)\big)\,dx +$$

$$+ (n+1)\int_{1-\delta_\varepsilon}^1 x^n \big(f(x) - f(1)\big)\,dx,$$

de unde rezultă că

$$|I_n - f(1)| \le (n+1)\cdot(1-\delta_\varepsilon)^n \cdot \int_0^{1-\delta_\varepsilon} |f(x) - f(1)|\,dx$$

$$\varepsilon\cdot(n+1)\cdot\int_{1-\delta_\varepsilon}^1 x^n \le$$

$$\le 2M\cdot(n+1)\cdot(1-\delta_\varepsilon)^n + \varepsilon$$

Cum $1-\delta_\varepsilon \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot(1-\delta_\varepsilon)^n = 0,$$

de unde rezultă că $(\exists)\ N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$2M\cdot(n+1)\cdot(1-\delta_\varepsilon)^n < \varepsilon, \quad (\forall)\ n > N_\varepsilon$$

Prin urmare, pentru orice $n > N_\varepsilon$,

$$|I_n - f(1)| < \varepsilon$$

$\square$

(9) În primul rând, dacă x ar fi multiplu întreg de 2π:

$$I(n) = \int_0^{2n\pi} \frac{1}{2+\cos y}\,dy = \sum_{j=1}^{n} \int_{2(j-1)\pi}^{2j\pi} \frac{1}{2+\cos y}\,dy$$

Schimbăm variabila $z = y - 2(j-1)\pi$ și obținem:

$$\int_{2(j-1)\pi}^{2j\pi} \frac{1}{2+\cos y}\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos z}\,dz = I(1)$$

Rezultă că

$$I(n) = n \cdot I(1), \quad \text{adică} \quad \frac{1}{n} I(n) = I(1),$$
$(\forall) n$

Dacă $x \notin 2\pi \mathbb{N}$ atunci corectăm până la un multiplu de 2π:

$$I(x) = \int_0^{2\pi \cdot \left[\frac{x}{2\pi}\right]} \frac{1}{2+\cos y}\, dy + \int_{2\pi \cdot \left[\frac{x}{2\pi}\right]}^{x} \frac{1}{2+\cos y}\, dy.$$

$$= \left[\frac{x}{2\pi}\right] \cdot I(1) + \int_{2\pi \cdot \left[\frac{x}{2\pi}\right]}^{x} \frac{1}{2+\cos y}\, dy$$

Cum $0 < \frac{1}{2+\cos y} \leq 1$, $(\forall) y$, rezultă că

$$0 < I(x) - \left[\frac{x}{2\pi}\right] \cdot I(1) \leq x - 2\pi \cdot \left[\frac{x}{2\pi}\right]$$

$$0 < I(x) - \left[\frac{x}{2\pi}\right] I(1) \leq 2\pi\left(\frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi}\right]\right) \leq 1.$$

Mai mult,

$$0 \leq I(1)\cdot\left(\frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi}\right]\right) < I(1)$$

Din inegalitățile de mai sus, deducem că:

$$-I(1) < I(x) - \frac{x}{2\pi} I(1) \leq 1,$$

prin urmare,

$$\frac{-I(1)}{x} < \frac{1}{x} I(x) - \frac{1}{2\pi}\cdot I(1) \leq \frac{1}{x}.$$

Trecând la limită $x \to \infty$ obținem:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} I(x) = \frac{1}{2\pi} I(1)$$

Rămâne să calculăm:

$$I(1) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos y}\, dy$$

Vrem să folosim substituția universală:

$$t = tg\,\frac{y}{2}$$

$$\cos y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Avem probleme când $y = \pi$, deci tăiem domeniul:

$$I(1) = \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos y}\, dy + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2+\cos y}\, dy$$

schimbare de variabilă $z = 2\pi - t$ în al doilea termen

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos y}\, dy + \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos y}\, dy$$

$$= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos y}\, dy$$

Acum, substituția funcționează:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos y}\, dy =$$

$t = tg\, \frac{y}{2}$

$y = 2\, arctg(t)$

$dy = \frac{2}{1+t^2}\, dt$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

de fapt înseamnă:

$$\left[= \lim_{x \to \infty} \int_0^{x} \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt \right]$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2}{2+2t^2+1-t^2}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{2}{3+t^2}$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

Rezultă că:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos y}\,dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right)'dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left[\operatorname{arctg}(\infty)-\operatorname{arctg}(0)\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

În concluzie, $I(1)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, deci limita cerută este:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}I(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot I(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$